



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

**ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО
ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 2-го курса заочной формы обучения по направлению
09.03.03 Прикладная информатика

Ростов-на-Дону

2025

Составитель: канд. физ.мат. наук, доцент Нурутдинова И.Н.

Приведены варианты заданий контрольной работы для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит индивидуальные задания контрольной работы, выполняемых студентами заочной формы. Тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»: классическое определение вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности и формулы Байеса, схема независимых испытаний и формула Бернулли, случайные величины, функция и плотность распределения вероятностей случайной величины, числовые характеристики случайных величин, выборочный метод, точечные и интервальные оценки, линейная регрессия, проверка статистических гипотез.

Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, правило выбора варианта в соответствии с порядковым номером студента в журнале группы приведено перед заданиями контрольной работы. Представлены основные теоретические положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к зачету и рекомендуемая литература.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

Номер варианта студента — двухзначное число, определяемое двумя последними цифрами номера зачётной книжки следующим образом: первая цифра номера варианта (число десятков) определяется по предпоследней цифре номера зачетной книжки. Если она нуль или чётная (2, 4, 6, 8), то число десятков номера варианта равно 0; если предпоследняя цифра номера зачётной книжки нечетная (1, 3, 5, 7, 9), то число десятков номера варианта равно единице. Число единиц номера варианта равно последней цифре номера зачётной книжки.

Например: зачётной книжке 3037206 соответствует вариант 6;

зачётной книжке 3037231 соответствует вариант 11.

Вариант 20 выполняет студент, у которого последние две цифры зачётной книжки 00, 20, 40, 60, 80, например, 3037200.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Раздел I. *Классическое определение вероятности*

1. Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

2. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется один туз.

3. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что среди них два апельсина?

4. Среди 10 электрических лампочек 3 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые наугад две лампочки окажутся нестандартными.

5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

6. Для выполнения лабораторной работы группа студентов случайным образом делится на две подгруппы по 12 человек. Какова вероятность, что три друга попадут в одну подгруппу?

7. В партии из 12 деталей 2 бракованные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех деталей окажутся 2 бракованные.

8. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь третьекурсников. Из этого состава декан наудачу выбирает пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятность, что все первокурсники попадут на конференцию.

9. 20 участников шахматного турнира разделили на 2 команды по 10 человек в каждой. Найти вероятность того, что 2 сильнейших игрока окажутся в одной команде.

10. Абонент забыл шестизначный номер телефона и набрал его наугад, помня лишь, что все цифры в нем различны. Какова вероятность набрать нужный номер?

11. В партии из 15 телевизоров 5 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что из трех телевизоров, выбранных наугад, два не имеют скрытых дефектов.

12. Игрок делит наугад колоду в 36 карт пополам и одну половину берет себе. Найти вероятность того, что у него окажутся все 4 туза.

13. На шести карточках написаны цифры от 1 до 6. Найти вероятность того, что среди 3-х случайно выбранных карточек есть карточка с номером 6.

14. Из 10 лотерейных билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов выигрышными являются два.

15. Бросают две игральных кости. Найти вероятность, что сумма выпавших на них очков не превзойдет 5.

16. На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом?

17. Бросают две игральных кости. Найти вероятность, что произведение выпавших на них очков не превзойдет 20.

18. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые потом тщательно перемешаны. Найти вероятность, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

19. На книжной полке стоят семь книг, среди которых трехтомник Лермонова М.Ю. Найти вероятность, что они стоят рядом.

20. В ящике 10 деталей, помеченных номерами 1, 2, 3, ..., 10. Наудачу из ящика извлекают 6 деталей. Найти вероятность, что среди них есть детали с №3 и №7.

Раздел II. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Прибор содержит генератор и осциллограф. За время работы генератор может выйти из строя с вероятностью 30 %, а осциллограф – с вероятностью 20 %. Отказы осциллографа и генератора не связаны друг с другом. Найти вероятность, что прибор будет работать исправно.

2. На стройке 3 крана. Вероятность безотказной работы первого крана в течение рабочего дня равна 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,9. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня безотказно будет работать хотя бы один кран.

3. В урне имеется 3 белых и 4 черных шара. Из урны наугад вытягиваются 3 шара. Найти вероятность, что хотя бы один из них окажется белым.

4. Два стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка поразят мишень.

5. Для сигнализации об аварии установлено 3 независимо работающих датчика. Вероятность срабатывания при аварии для первого датчика равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность, что при аварии сработает хотя бы один датчик.

6. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

7. В цехе работает два конвейера. Вероятность безотказной работы первого конвейера равна 0,6, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает один конвейер.

8. Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Найти вероятность, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

9. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что станок потребует в течение рабочего дня ремонта, для первого станка равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня ни один из станков не потребует ремонта.

10. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым – 0,6. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из стрелков.

11. Устройство состоит из двух независимо работающих блоков. Вероятности отказа блоков соответственно равны 0,1 и 0,05. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

12. Найти вероятность того, что при одновременном бросании трех игральных костей, ни на одной из них не выпадет "6".

13. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна 0,25. Вероятность аварии прибора при повышенном напряжении равна 0,6. Определить вероятность аварии прибора включенного в данную электрическую цепь.

14. В магазине установлено 3 кондиционера. Вероятность быть включенным для первого кондиционера равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что включены все три кондиционера.

15. Радист пытается принять сигналы от трех передатчиков. Сигнал первого передатчика он может принять с вероятностью 50 %, второго – 40 % и третьего – 30 %. Найти вероятность, что ему удастся принять сигналы от всех передатчиков.

16. В приборе за сутки работы могут выйти из строя деталь №1 с вероятностью 0,1; деталь №2 с вероятностью 0,05; деталь №3 с вероятностью 0,15 независимо друг от друга. Какова вероятность, что в течение суток выйдет из строя только одна деталь?

17. Два стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,75, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что мишень поразит только один стрелок.

18. На стройке 3 крана. Вероятность безотказной работы первого крана в течение рабочего дня равна 0,6; второго – 0,8; третьего – 0,9. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня безотказно будут работать два крана.

19. Для сигнализации об аварии установлено 3 независимо работающих датчика. Вероятность срабатывания при аварии для первого датчика равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,75. Найти вероятность, что при аварии сработает хотя бы два датчика.

20. В приборе за сутки работы могут выйти из строя деталь №1 с вероятностью 0,1; деталь №2 с вероятностью 0,05; деталь №3 с вероятностью 0,15 независимо друг от друга. Какова вероятность, что в течение суток прибор будет работать безотказно?

Раздел III. Условная вероятность

Каждое из указанных ниже слов, составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные кубики, которые затем сложены в коробку. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой. Найти вероятность получить при таком извлечении прежнее слово:

1. Каракатица; 2. Крокодил; 3. Институт; 4. Университет; 5. Колокол; 6. Трактор; 7. Водопад
8. Оперетта; 9. Водоворот; 10. Барбарис; 11. Космос; 12. Радар; 13. Тротуар; 14. Водород;
15. Раритет; 16. Портрет; 17. Баобаб; 18. Парапет; 19. Начальник; 20. Биссектриса.

Раздел IV. Полная вероятность. Формулы Байеса

1. В двух коробках находятся однотипные диоды. В первой – 20 шт., из них 2 неисправных; во второй – 10 шт., из них 4 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран диод. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из второй коробки.

2. Имеются две партии деталей, причем известно, что в первой нет бракованных, а во второй бракованных $1/4$. Деталь, взятая из наугад выбранной партии, оказалась небракованной. Какова вероятность, что она взята из второй партии?

3. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка составляет 70 %, а для второго 60 %. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что попал первый стрелок.

4. Студент, явившийся на экзамен последним, берет наугад один из оставшихся трех билетов. Вероятности того, что он получит положительную оценку, отвечая на каждый из этих билетов, следующие: 0,6; 0,5; 0,9. Какова вероятность того, что он получит положительную оценку?

5. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний – 0,3, мелкий – 0,1. Какова вероятность, что попавший в броню осколок пробьет ее?

6. В одной корзине половина шаров белые, а во второй белых $1/4$. Наугад из каждой корзины извлекают по одному шару и перекладывают в ящик, после чего из этого ящика наугад извлекают один шар. Какова вероятность, что извлеченный шар окажется белым?

7. Станок работает в двух режимах, причем режим I использует 90% времени. Вероятность выхода из строя станка при режиме I равна 0,1, а при режиме II – 0,3. Станок вышел из строя. Какова вероятность того, что он работал в режиме II?

8. В город поступило 3000 л молока с первого завода и 3500 – со второго завода. Известно, что средний процент непригодного молока среди продукции первого завода равен 1,5 %, второго – 1 %. Найти вероятность того, что купленный литр молока в этом городе окажется непригодным.

9. Изготовленное изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что дефектное изделие будет обнаружено?

10. Из трамвайного парка в случайном порядке выходят 4 трамвая маршрута №1 и 8 трамваев маршрута №2. Найти вероятность того, что второй по порядку вышедший на линию трамвай, будет иметь №1.

11. Пусть в некоторой группе людей 3% мужчин и 0,5% женщин – дальтоники. Наугад выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность, что это был мужчина, если количество мужчин относится к количеству женщин в данной группе как 10:9?

12. В партии 100 радиоламп, из них 80 изготовлено на заводе №1, а 20 – на заводе №2. Вероятности того, что лампа не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равны для этих заводов соответственно 0,5 и 0,9. Определить вероятность того, что взятая наугад из партии радиолампа не выйдет из строя в течение гарантийного срока.

13. В магазин поступили телевизоры с двух заводов. У первого завода 20% брака, у второго – 10%. Купленный телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен на 2-ом заводе, если в магазине 30% телевизоров, изготовленных на первом заводе и 70% – изготовленных на втором?

14. В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или чёрный. В урну опускается один белый шар, затем наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

15. Половина поступивших на склад изделий изготовлено на 1-ом заводе, третья часть – на 2-ом заводе, остальные изделия – на 3-ем заводе. Вероятность производства брака на 1-ом заводе равна 0,2, на 2-ом заводе – 0,3, на 3-ем заводе – 0,1. Какова вероятность, что наугад выбранное для контроля изделие окажется бракованным?

16. В двух коробках однотипные конденсаторы. В первой – 20 штук, из них 3 неисправных; во второй – 40 штук, из них 2 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран конденсатор. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из первой коробки.

17. На базе находятся лампы, изготовленные на двух заводах. Из них 70 % изготовлено на первом заводе, а 30 % – на втором. Известно, что 90 % ламп, изготовленных на первом заводе, соответствуют стандарту, а среди ламп, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту лишь 80 %. Найти вероятность, что взятая наугад лампа с базы будет соответствовать стандарту.

18. Вероятность детали быть годной равна 0,95. При контроле вероятность признать годную деталь бракованной равна 0,1, а бракованную деталь годной – 0,15. Какова вероятность, что наудачу взятая деталь будет признана годной?

19. В группе спортсменов 15 бегунов, 10 прыгунов и 8 пловцов. Вероятность выполнить спортивный разряд для бегуна равна 0,7, для прыгуна – 0,8, а для пловца – 0,85. Один из наудачу выбранных спортсменов выполнил разряд. Какова вероятность, что это бегун?

20. Станки №1, №2 и №3 с вероятностями брака соответственно 0,02; 0,03; 0,05 выпускают детали, поступающие на общий склад. Производительность станка №1 в два раза выше, чем станка №2, а производительность станка №2 в три раза выше, чем станка №3. Деталь, взятая со склада, оказалась бракованной. Какова вероятность, что она изготовлена на станке №1?

Раздел V. Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли

1. Кубик бросается 5 раз. Найти вероятность, что шестерка выпадет 2 раза.

2. На автовокзале есть 10 автобусов. Для каждого из них вероятность поломки за день составляет 30 %. Определить вероятность того, что за день выйдет из строя 7 автобусов.

3. В студии телевидения 3 телекамеры. Для каждой камеры вероятность, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены две камеры.

4. Всхожесть семян некоторого растения составляет 60%. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут три?

5. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наивероятнейшее число опоздавших из 856 пассажиров.

6. Предполагается, что 10% открывающихся малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий более двух в течение года прекратят свою деятельность?

7. Вероятность того, что двигатель потребует наладки в течение первого года эксплуатации для автомобилей некоторой марки равна 0,2. Найти вероятность того, что из 4-ех автомобилей данной марки наладки двигателя в течение 1-ого года потребуют не более 2-ух.

8. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове в праздничный день равна 0,005. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность того, что было не более трех сбоев.

9. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из них равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один из элементов?

10. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8 автомашин.

11. При изготовлении предохранителей 15% не удовлетворяют стандарту. Найти наивероятнейшее число стандартных предохранителей в партии из 500 штук.

12. Найти вероятность того, что из 100 посеянных семян, взойдет не менее 90, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8.

13. В хлопке 70% длинных волокон. Какова вероятность, что среди 10 наудачу взятых волокон не более 8 длинных?

14. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

15. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 100 детей в роддоме число мальчиков и девочек одинаковое.

16. Оптовая база обслуживает 5 магазинов. От каждого из них заявка на товар на следующий день может поступить с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что заявки на товар на следующий день поступят от трех магазинов?

17. Изготовили 90 деталей. Какова вероятность изготовления деталей первого сорта, если наивероятнейшее число таких деталей из 90 равно 82?

18. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 100 билетов, выиграет по 10 билетам?

19.вероятность выхода из строя каждого прибора равна 0,2. Какова вероятность, что из 100 приборов из строя выйдут от 14 до 24?

20. Вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает неправильно, равна 0,03. Найти наимвероятнейшее число случаев правильной работы автомата, если будет опущено 150 монет.

Раздел VI. Функции распределения и плотности распределения вероятностей. Числовые характеристики случайных величин

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C \cdot 5x, & 0 < x \leq 20, \\ 1, & x > 20. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и плотность вероятности $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $-1 \leq X \leq 0,5$. Найти плотность вероятности и функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

4. Случайная величина X задана законом распределения:

X	1	7	10	15
p	0,3	0,2	p_3	0,1

Вычислить p_3 . Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

5. Автомат штампуе детали. Контролируется длина детали X , которая распределена нормально с математическим ожиданием 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей составляет не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм.

6. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно на указанном интервале, найти среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания.

7. В магазин поступили зонты с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 зонта. Составить закон распределения случайной величины X – числа купленных зонтов первой фабрики. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{x-1}{2}, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

9. Случайная величина X распределена по закону Коши $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и математическое ожидание случайной величины X .

10. Устройство состоит из 3-х независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения случайной величины X – числа отказавших элементов в одном опыте. Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график. Найти среднее число элементов, отказавших в одном опыте.

11. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея боезапас четыре патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить закон распределения случайной величины X – числа использованных патронов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

12. Станок-автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр X . Считая, что X – нормально распределенная величина с математическим ожиданием $a=10$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma=0,1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

13. Плотность распределения случайной величины X задана в виде:

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \notin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти постоянную C , вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(0; \pi/4)$ и математическое ожидание случайной величины X .

14. Закон распределения случайной величины X задан таблицей

X	1	2	3	4
p	1/16	p_2	1/2	3/16

Вычислить p_2 , $M(X)$, $D(X)$. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

15. На станцию под погрузку поступило 20 вагонов, среди которых два с дефектом. Из них случайным образом отобрано три вагона. Построить закон распределения случайной величины X – числа дефектных вагонов среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

16. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X .

17. Испытывается устройство, состоящее из 4-х независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов равны между собой и равны $p=0,3$. Составить закон распределения случайной величины X – числа отказавших приборов. Найти среднее число отказавших приборов и дисперсию числа отказавших приборов.

18. Случайная величина X – погрешность при измерении длины заготовки – задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, $M(X)$ и вероятность того, что погрешность при измерении имеет значение $|x| < 1$.

19. В урне четыре шара с номерами 1, 2, 3 и 4. Наудачу извлекают два из них. Составить закон распределения случайной величины X – суммы номеров извлеченных шаров и построить его график.

20. Случайная величина X – время опоздания поезда распределена равномерно в пределах от 0 до 20 минут. Найти функцию и плотность распределения этой случайной величины, построить их графики, а также найти вероятность того, что время опоздания окажется в пределах от 0 до 5 минут.

Раздел VII. Выборка, её числовые характеристики

Даны результаты измерений значений случайной величины X . Составить статистическое распределение выборки и найти:

- а) характеристики вариационного ряда: размах варьирования, моду, медиану;
- б) эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
- в) построить полигон частот и гистограмму;
- г) выборочную среднюю;
- д) выборочную и исправленную дисперсии;
- е) выборочное и исправленное средние квадратические отклонения (стандарт);
- ж) коэффициент вариации (%);

з) доверительный интервал для среднего значения признака X с надежностью $\gamma = 0,95$;

ВАРИАНТ 1: 12; 6; 8; 6; 10; 11; 7; 10; 12; 8; 7; 7; 6; 7; 8; 6; 11; 9; 11; 9.

ВАРИАНТ 2: 10; 11; 9; 10; 7; 8; 8; 8; 11; 9; 8; 7; 5; 9; 7; 7; 14; 11; 9; 8.

ВАРИАНТ 3: 7; 4; 7; 5; 5; 10; 7; 7; 5; 8; 10; 10; 15; 10; 10; 13; 12; 11; 15; 6.

ВАРИАНТ 4: 5; 3; 7; 10; 5; 5; 2; 10; 7; 2; 7; 7; 4; 2; 4; 10; 3; 7; 7; 2.

ВАРИАНТ 5: 11; 15; 12; 0; 16; 19; 6; 11; 12; 13; 16; 8; 9; 14; 5; 11; 3; 3; 0; 6.

ВАРИАНТ 6: 17; 18; 16; 16; 17; 18; 19; 17; 15; 17; 19; 18; 16; 16; 18; 18; 12; 17; 15; 15.

ВАРИАНТ 7: 13; 14; 15; 15; 13; 8; 14; 17; 15; 16; 16; 14; 16; 14; 11; 16; 15; 17; 14; 18.

ВАРИАНТ 8: 11; 13; 18; 12; 17; 14; 16; 13; 15; 16; 8; 14; 15; 11; 10; 16; 15; 16; 12; 14.

ВАРИАНТ 9: 17; 14; 16; 17; 10; 15; 18; 17; 12; 20; 13; 14; 15; 21; 14; 17; 15; 10; 18; 17.

ВАРИАНТ 10: 15; 16; 17; 12; 19; 17; 13; 16; 16; 18; 18; 19; 17; 18; 19; 19; 21; 18; 16; 17.

ВАРИАНТ 11: 11; 15; 12; 14; 13; 14; 16; 14; 15; 11; 12; 12; 13; 14; 15; 13; 14; 15; 12; 11.

ВАРИАНТ 12: 14; 15; 15; 14; 13; 14; 16; 11; 12; 14; 14; 13; 15; 16; 14; 13; 13; 11; 13; 14.

ВАРИАНТ 13: 17; 20; 17; 13; 21; 11; 22; 21; 8; 9; 22; 21; 20; 19; 10; 9; 23; 20; 20; 14.

ВАРИАНТ 14: 18; 9; 20; 11; 22; 19; 15; 19; 20; 17; 19; 18; 17; 21; 20; 23; 12; 13; 20; 19.

ВАРИАНТ 15: 17; 21; 8; 20; 23; 18; 22; 20; 17; 12; 20; 11; 9; 19; 20; 9; 19; 17; 21; 13.

ВАРИАНТ 16: 18; 17; 16; 16; 20; 14; 16; 15; 15; 18; 16; 16; 16; 13; 16; 16; 15; 15; 17; 19.

ВАРИАНТ 17: 8; 6; 6; 11; 9; 9; 13; 12; 14; 11; 10; 9; 12; 8; 6; 9; 14; 13; 8; 10.

ВАРИАНТ 18: 21; 23; 21; 19; 25; 23; 28; 23; 19; 16; 16; 21; 23; 23; 25; 28; 21; 28; 16; 25.

ВАРИАНТ 19: 10; 14; 14; 11; 10; 15; 16; 10; 11; 15; 16; 18; 11; 18; 15; 14; 15; 15; 11; 10.

ВАРИАНТ 20: 27; 31; 25; 31; 27; 28; 31; 25; 25; 29; 28; 31; 29; 27; 31; 25; 23; 23; 25; 29

Раздел VIII. Линейная корреляция

По данным наблюдений определить параметры линейного уравнения регрессии Y на X . Найти коэффициенты регрессии и корреляции проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции. Найти доверительные интервалы для параметров уравнения регрессии. Определить коэффициент детерминации. Проверить гипотезу о значимости полученного уравнения регрессии. Найти прогнозируемое моделью значение y при $x=x_0$ и найти для него доверительный интервал. Уровень значимости α принять равным 0,05.

1.

X	2	4	6	8	10	12	14
Y	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0	8,5	9,5

$x_0=5$

2.

X	0,1	0,5	1	2	4	5	8	10,5	13	16
Y	0,3	0,7	1,0	1,4	2,0	2,2	2,8	3,2	3,6	4,0

$$x_0=6$$

3.

X	-3,0	-2,5	-2,0	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	2,0	2,5
Y	14	12,5	11	8	6,5	5	3,5	2	-1	-2,5

$$x_0=1,5$$

4.

X	2	4	6	8	10	12	14
Y	3,5	6,0	7,0	6,0	7,5	8,5	10

$$x_0=5$$

5.

X	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Y	3,6	3,8	3,9	3,9	4,0	4,2	4,3	4,4

$$x_0=3,8$$

6.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-1	-1,7	-2,1	-2,4	-2,6	-2,8	-3	-3,1	-3,2	-3,3

$$x_0=7,5$$

7.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,35	0,3	0,3

$$x_0=4,5$$

8.

X	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
Y	3	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7

$$x_0=2,2$$

9.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	6,4	6,6	6,9	7,1	7,3	7,4	7,5	7,5	7,6	7,7

$$x_0=8,5$$

10.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	2	2,1	2,2	2,3	2,42	2,5	2,6	2,68	2,8	2,91

$$x_0=2,5$$

11.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	1,6	1,4	1,3	1,2	1,2	1,15	1,1	0,9	0,7	0,4

$$x_0=3,8$$

12.

X	5	9	10	12
Y	3	6	4	7

$$x_0=5,6$$

13.

X	1	2	5	8	16
Y	1,0	1,4	2,2	2,8	4,0

$$x_0=6$$

14.

X	2	5	7	10
Y	2	4	6	8

$$x_0=8$$

15.

X	-1	-0,5	0	0,8	1,5
Y	2,7	3,2	4,0	6,5	11,0

$$x_0=1,2$$

16.

X	-2	-1	0	1	2
Y	15,8	6,4	3,0	1,7	1,3

$$x_0=-0,5$$

17.

X	1	3	6	8	10
Y	8,9	5,6	3,5	2,7	2,0

$$x_0=7$$

18.

X	1	3	6	10
Y	5,5	6,9	7,4	7,5

$$x_0=5,4$$

19.

X	9,5	10,5	11,0	12,0	14,5
Y	4,5	6,0	8,5	9,0	10,0

$$x_0=13,0$$

20.

X	6,6	7,0	8,0	9,0	9,8
Y	6,0	7,8	8,7	7,8	9,0

$$x_0=9,5$$

Раздел IX. Статистическая проверка статистических гипотез

В заданиях 1–10 приведено эмпирическое распределение дискретной случайной величины X . Требуется, используя критерий χ^2 , проверить на уровне значимости $\alpha=0,05$ гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

1. Случайная величина X – число нестандартных изделий в одной партии. Число наблюдений $n = 500$:

x_i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
n_i	194	186	88	26	5	1	0

2. Случайная величина X – число вышедших из строя станков в цехе за одну смену. Число наблюдений $n = 200$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
n_i	41	62	45	22	16	8	4	2	0

3. Случайная величина X – число нестандартных коробок консервов в одном ящике. Число наблюдений $n = 200$:

x_i	0	1	2	3	4	≥ 5
n_i	132	43	20	3	2	0

4. Случайная величина X – число нестандартных изделий в одной партии. Число наблюдений $n = 200$:

x_i	0	1	2	3	4	≥ 5
n_i	116	56	22	4	2	0

5. Случайная величина X – число отказов радиоэлектронной аппаратуры. Число наблюдений $n = 59$:

x_i	0	1	2	3	≥ 4
n_i	42	10	4	3	0

6. Случайная величина X – число неправильных соединений в минуту на телефонной станции. Число наблюдений $n = 60$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
n_i	8	17	16	10	6	2	0	1	0

7. Случайная величина X – число деталей, поступивших на конвейер в течение 2-х минутного интервала. Число наблюдений $n = 600$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
n_i	400	167	29	3	0	0	1	0

8. Случайная величина X – число поврежденных стеклянных изделий в контейнере. Число наблюдений $n = 500$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1	0

9. Случайная величина X – число сбоев в работе ЭВМ за неделю. Число наблюдений $n = 20$:

x_i	0	1	2	3	4	≥ 5
n_i	109	65	22	3	1	0

10. Случайная величина X – число заявок, поступающих на телефонную станцию в минуту. Число наблюдений $n = 100$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
n_i	7	21	26	21	13	7	3	2	0

11. Случайная величина X – число неправильно сброшюрованных учебников в партии. Число наблюдений $n = 1000$:

x_i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
n_i	505	336	125	24	8	2	0

12. Случайная величина X – число заявок, поступающих в систему массового обслуживания в течение часа. Число наблюдений $n = 100$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	1	3	8	14	17	17	15	10	7	5	2	1

13. Случайная величина X – число нестандартных изделий в одной партии. Число наблюдений $n = 200$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
n_i	62	45	22	16	8	4	2	0

14. Случайная величина X – число поврежденных при перевозке изделий в одной партии. Число наблюдений $n = 500$:

x_i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
n_i	403	370	167	46	12	2	0

15. Случайная величина X – число несчастных случаев в день. Число наблюдений $n = 370$:

x_i	0	1	2	3	≥ 4
n_i	280	75	12	3	0

16. Случайная величина X – количество ошибок в документе. Число наблюдений $n = 100$:

x_i	0	1	2	3	4	≥ 5
n_i	75	16	5	3	1	0

17. Случайная величина X – число несчастных случаев в день. Число наблюдений $n = 370$:

x_i	0	1	2	3	4	≥ 5
n_i	15	7	7	2	1	0

18. Случайная величина X – число нестандартных изделий в одной партии. Число наблюдений $n = 200$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 7
n_i	41	62	45	22	16	8	4	2	0

19. Случайная величина X – число сорняков в одной партии семян. Число наблюдений $n = 1000$:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
n_i	405	366	175	40	8	4	2	0

20. Случайная величина X – количество бракованных изделий в одной партии. Число наблюдений $n = 1000$:

x_i	0	1	2	3	4	≥ 6
n_i	604	306	77	12	1	0

КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Теория вероятностей - математическая наука, изучающая закономерности для случайных явлений. Одним из основных терминов теории вероятностей является понятие случайного события. **Событием** называется всякий факт (исход), который в результате опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти. Каждому из таких событий можно поставить в соответствие определенное число, называемое его **вероятностью**, и являющееся мерой возможного совершения этого события. Например, отказ изделия - событие случайное, которое всегда имеет малую вероятность, если изделие обладает высокой эксплуатационной надежностью.

Проведем классификацию основных типов событий. **Совместные события** – такие события, появление одного из которых не исключает возможности появления другого. **Попарно**

несовместные события – такие события, появление одного из которых исключает любые возможности появления другого из остальных. **Зависимые события** – такие события, появление одного из которых влияет на появление другого события. **Попарно независимые события** – такие события, появление одного из которых не влияет на появление другого события из остальных. **Противоположные события** это такие два события A и \bar{A} , для которых наступление любого из них приводит к тому, что другое событие не наступает. Например, наступает A , а событие \bar{A} не наступает и, наоборот.

Полная группа событий – такое множество событий, в котором в результате опыта должно произойти хотя бы одно из событий этой группы событий. Противоположные события A и \bar{A} составляют полную группу событий. **Достоверное событие** – это такое событие, которое обязательно происходит при проведении опыта. **Невозможное событие** – это такое событие, которое не может происходить при проведении опыта. **Элементарное событие** – это такое событие, которое не может быть расчленено на более мелкие части по отношению ко всем возможным результатам (исходам) проводимого опыта. **Сложное событие** – это такое событие, которое может быть расчленено на более мелкие события и является комбинацией элементарных событий. Наиболее удобные для практики комбинации событий является сумма, либо произведение нескольких событий.

Сумма событий A_1, A_2, \dots, A_n – такое событие A , которое описывается в данном опыте фактом появления хотя бы одного события из указанного n – элементного множества событий. Сумма событий (объединение) обозначается $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

Произведение событий A_1, A_2, \dots, A_n – такое событие A , которое описывается в данном опыте фактом наблюдения одновременного появления всех событий из указанного n – элементного множества событий. Произведение событий (пересечение) обозначается $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$. Приведем теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теоремы сложения для совместных и несовместных событий имеют вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \text{ } i \neq j, A_i A_j = \emptyset.$$

Теоремы умножения для зависимых и независимых в совокупности случайных событий

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B),$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Символ \emptyset обозначает пустое множество. Последняя формула, приведенная в последней строчке, справедлива для независимых в совокупности событий. В случае двух событий, которые независимы, условная вероятность и безусловная вероятности совпадают

$$P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A).$$

Пусть событие A может произойти в результате появления только одного события H_i , входящего в полную группу попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , тогда справедлива **формула полной вероятности**, которая позволяет найти вероятность A

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n).$$

Несовместные события H_i из полной группы называются гипотезами, причем

$$P(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Вероятности гипотез H_i после проведения опыта уточняются **формулой Байеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Классическое определение вероятности для события A выражается отношением

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число всех элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A ;
 n – общее число возможных элементарных исходов, которые образуют полную группу равновозможных событий. **Относительная частота события A** равна отношению

$$W(A) = \frac{k}{n},$$

где k – число испытаний, в которых данное событие наступило; n – общее число произведенных испытаний. **Опыты** считаются **независимыми**, если вероятность того или иного исхода каждого из них не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Для схемы независимых испытаний справедлив **биномиальный закон распределения вероятностей** (формула Бернулли). **Формула Бернулли** позволяет найти вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз при проведении n независимых опытов

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}, \quad P(A) = p, P(\bar{A}) = q = 1 - p,$$

где p – вероятность появления события A в любом одном испытании, C_n^k – число комбинаций в виде сочетаний из n по k элементов. **Комбинация** в виде **сочетания из n по k элементов** представляет собой подмножество, состоящее ровно из k разных элементов. Такое подмножество принадлежит заданному n – элементному множеству. Сочетание от другого сочетания отличается хотя бы одним элементом.

Комбинация в виде **размещения из n по k элементов** представляет собой набор, состоящий ровно из k разных элементов. Такой набор принадлежит заданному n – элементному множеству. Размещение от другого размещения отличается либо составом элементов, либо порядком следования элементов. Число комбинаций в виде размещения из n по k элементов находится по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1), k \leq n.$$

В случае $k = n$ размещения превращаются в другие комбинации – перестановки. Число комбинаций в виде перестановок из n элементов находится с помощью формулы

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Перестановка от другой перестановки отличается только порядком следования элементов. Состав элементов в комбинации в виде перестановки остается постоянным.

Пример 1. Классическое определение вероятности.

Из колоды в 36 карт наудачу извлекли три карты. Найти вероятность среди них окажется валет.

Решение. Найдем значения числителя и знаменателя $m = C_4^1 C_{36-4}^{3-1}$, $n = C_{36}^4$, тогда

$$P(A) = \frac{4 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{16 \cdot 31}{105 \cdot 17} = \frac{496}{1785} = 0,278. \quad \text{Ответ } 0,278.$$

Пример 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

На объекте работают три видеокamеры. Вероятности безотказной работы видеокamер разные, и равны соответственно 0,9;0,8;0,7. Найти вероятность того, что работает хотя бы одна видеокamera этого объекта. Решение. Для суммы событий $P(A + B + C) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 1 - 0,006 = 0,994$. Ответ 0,994.

Пример 3. Условная вероятность.

Слово «мрамор» разложили по буквам, перемешали буквы и поместили в урну. Найти вероятность того, что при извлечении букв из урны получится слово «мрамор». Решение.

В слове имеется повторение двух букв $P(\text{мрамор}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{180} = 0,00555$.

Пример 4. Полная вероятность. Формула Бейеса.

Имеется две партии деталей. Известно, что в первой партии нет бракованных деталей, а во второй партии вероятность наличия бракованных деталей равна $1/4$. Деталь, взятая нами из наугад выбранной партии деталей, оказалась годной. Найти вероятность того, что эта деталь без брака выбрана из первой партии деталей. Решение. Согласно условию имеем

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}, P(A|H_1) = 1, P(A|H_2) = \frac{3}{4}, \text{ найдем } P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8}.$$

Вычислим условную вероятность $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7} = 0,571$.

Пример 5. Схема Бернулли. Предельные теоремы в формуле Бернулли.

Устройство состоит из 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из этих элементов равна 0,0005. Найти вероятность отказа этого устройства, если для отказа всего устройства достаточно, чтобы отказал хотя бы один его элемент.

Решение. Положим $P(A) = 1 - P_n(k)$, $n = 2000$, $k = 0$. Воспользуемся формулой

$$\text{Пуассона } P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np; \quad \lambda = 1, P_{2000}(0) = \frac{1}{e}, P(A) = 1 - \frac{1}{e} = 0,632.$$

Пример 6. Функции распределения и плотности распределения. Числовые характеристики СВ.

Согласно расписанию автобусы на маршруте следуют друг за другом с интервалом в десять минут. Время ожидания автобуса X на этом интервале распределено равномерно. Найти среднее время ожидания автобуса, дисперсию времени ожидания. Решение. Концы интервала времени ожидания равны $a = 0$, $b = 10$ мин. Тогда среднее время ожидания

$$\text{автобуса равно величине } M(X) = \frac{a + b}{2} = 5 \text{ мин}, \text{ а дисперсия этого времени равна}$$

$$\text{следующему значению } D(X) = \frac{(b - a)^2}{12} = 8,33 \text{ мин}^2. \text{ Ответ } 5 \text{ мин}; 8,33 \text{ мин}^2.$$

Выборка и её числовые характеристики. После получения статистических данных для дальнейшего их анализа проводится упорядочение данных, их графическое представление и расчет основных числовых характеристик.

Наблюдаемые значения исследуемого признака X называют вариантами и обозначают x_1, x_2, \dots, x_k , числа их наблюдений называют частотами и обозначают n_1, n_2, \dots, n_k . Общее число наблюдений называют объемом выборки и обозначают n , $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называется вариационным рядом. К характеристикам вариационного ряда относятся:

- 1) Размах варьирования R — это разность между наибольшим x_{\max} и наименьшим x_{\min} значениями, $R = x_{\max} - x_{\min}$;
- 2) Мода Mo — это варианта, имеющая наибольшую частоту;
- 3) Медиана Me — это варианта, делящая вариационный ряд пополам по числу вариантов.

Статистическим распределением выборки называют множество вариантов и соответствующих им частот. Обычно статистическое распределение выборки представляют в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_k
n_i	n_1	n_2	\dots	n_k

Эмпирической функцией распределения называется числовая функция $F^*(x)$, определяющая относительную частоту события $X < x$. Она вычисляется по формуле:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (1)$$

где n_x — сумма частот вариантов, значения которых меньше x , n — объём выборки.

$F^*(x)$ является неубывающей функцией, значения которой принадлежат отрезку $[0,1]$. $F^*(x)$ служит оценкой теоретической функции распределения $F(x)$, определяющей вероятность события $X < x$.

Основными графическими формами представления данных наблюдений являются полигон частот и гистограмма.

Полигоном частот называется ломаная линия, звенья которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1) , (x_2, n_2) , \dots , (x_k, n_k) .

Гистограммой называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы одинаковой длины h , а высотами — плотности интервальных частот n_i/h .

Основными характеристиками выборки являются:

- 1) Выборочная средняя \bar{x}_B , вычисляется по формуле:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i. \quad (2)$$

- 2) Выборочная дисперсия D_B , вычисляется по формуле:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x}_B)^2. \quad (3)$$

- 3) Исправленная дисперсия S^2 , вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B \quad (4)$$

- 4) Выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B , вычисляется по формуле:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (5)$$

- 5) Исправленное среднее квадратическое отклонение s , вычисляется по формуле:

$$s = \sqrt{S^2}. \quad (6)$$

- 6) Коэффициент вариации V , вычисляется по формуле:

$$V = \frac{s}{\bar{x}_B} 100\% . \quad (7)$$

Перечисленные характеристики относятся к точечным оценкам, при малых объёмах выборки предпочтительнее пользоваться интервальными оценками.

Доверительным интервалом для параметра θ , точечной оценкой которого является θ^* , называют интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, содержащий с заданной вероятностью γ значение параметра θ , γ называют надёжностью оценки.

Например, в случае нормально распределённой случайной величины доверительный интервал для среднего значения при неизвестном параметре σ определяется формулой:

$$\left(\bar{x}_B - \frac{ts}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{ts}{\sqrt{n}} \right), \quad (8)$$

где t — критическая точка распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы для двусторонней области на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$, определяется по таблицам [Приложение 1].

Пример 7. Даны результаты измерений значений случайной величины X :

12; 9; 16; 17; 10; 9; 15; 12; 15; 16; 20; 18; 17; 9; 15; 9; 16; 9; 18; 16

Составить статистическое распределение выборки и найти:

- а) характеристики вариационного ряда: размах варьирования, моду, медиану;
- б) эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
- в) построить полигон частот и гистограмму;
- г) выборочную среднюю;
- д) выборочную и исправленную дисперсии;
- е) выборочное и исправленное средние квадратические отклонения (стандарт);
- ж) коэффициент вариации (%);
- з) доверительный интервал для среднего значения признака X с надёжностью $\gamma = 0,95$;

Решение. Составим статистическое распределение выборки. Для этого расположим варианты в порядке возрастания:

9; 9; 9; 9; 9; 10; 12; 12; 15; 15; 15; 16; 16; 16; 16; 17; 17; 18; 18; 20

и подсчитаем числа наблюдений каждой варианты — частоты. Получим:

x_i	9	10	12	15	16	17	18	20
n_i	5	1	2	3	4	2	2	1

а) Размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min} = 20 - 9 = 11$; мода $Mo = 9$; объём выборки $n = 20$, поэтому середина вариационного ряда находится между 10-й и 11-й вариантами в упорядоченном вариационном ряду, и медиана вычисляется как их среднее арифметическое, $Me = (15 + 15) / 2 = 15$.

б) Эмпирическую функцию распределения найдём по формуле (1) и построим график (рис.1):

$$\begin{aligned}
x \leq 9 \quad F^*(x) &= 0; \\
9 < x \leq 10 \quad F^*(x) &= \frac{5}{20} = 0,25; \\
10 < x \leq 12 \quad F^*(x) &= \frac{5+1}{20} = 0,3; \\
12 < x \leq 15 \quad F^*(x) &= \frac{5+1+2}{20} = 0,4; \\
15 < x \leq 16 \quad F^*(x) &= \frac{5+1+2+3}{20} = 0,55; \\
16 < x \leq 17 \quad F^*(x) &= \frac{5+1+2+3+4}{20} = 0,75; \\
17 < x \leq 18 \quad F^*(x) &= \frac{5+1+2+3+4+2}{20} = 0,85; \\
18 < x \leq 20 \quad F^*(x) &= \frac{5+1+2+3+4+2+2}{20} = 0,95; \\
x > 20 \quad F^*(x) &= \frac{5+1+2+3+4+2+2+1}{20} = 1.
\end{aligned}$$

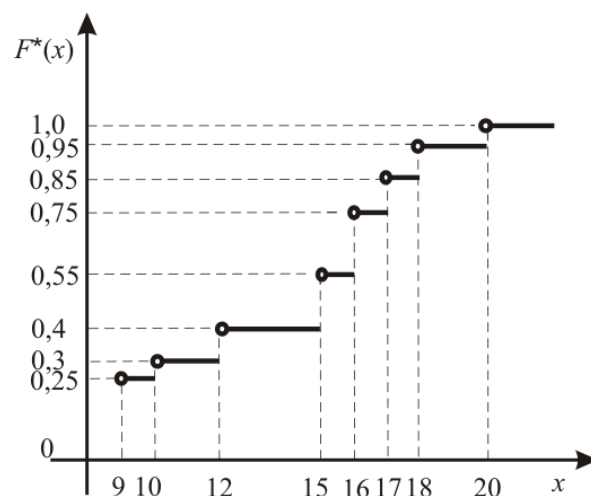


Рис. 1

в) Построим полигон частот (рис. 2). Для этого по оси OX отложим наблюдаемые значения x_i , а по оси OY частоты n_i . Отметим точки с координатами (x_i, y_i) и соединим их последовательно отрезками прямых.

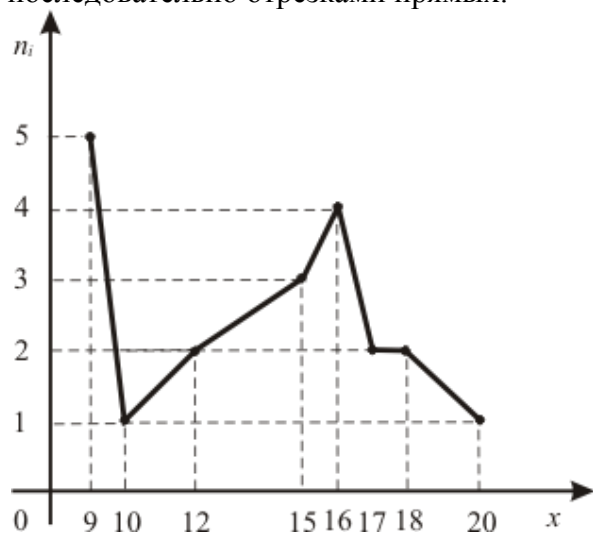


Рис. 2

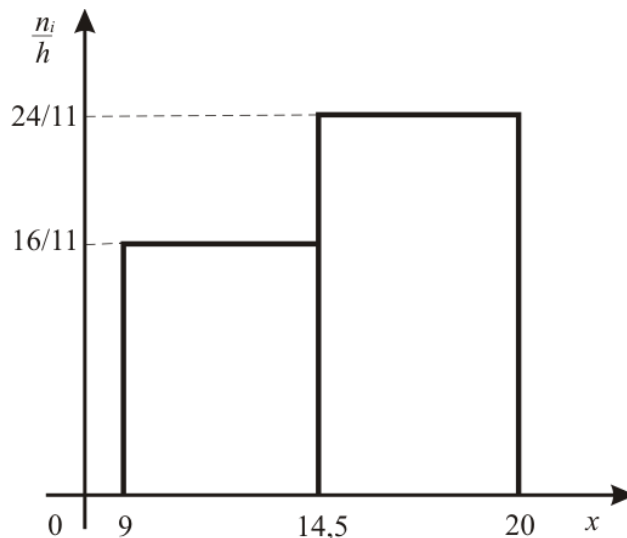


Рис. 3

Для построения гистограммы разобьём интервал изменения x (9,20) на два интервала одинаковой длины $h=5,5$, подсчитаем интервальные частоты и плотности интервальных частот. Результаты внесём в таблицу 1.

Таблица 1

Интервалы	Интервальные частоты n_i	Плотности интервальных частот n_i / h
$[9; 14,5)$	8	16/11
$[14,5; 20]$	12	24/11

Построим гистограмму (рис. 3).

г) Вычислим выборочную среднюю по формуле (2):

$$\bar{x}_b = \frac{1}{20}(9 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 1) = 13,9.$$

д) Вычислим выборочную дисперсию по формуле (3):

$$D_b = \frac{1}{20}(9^2 \cdot 5 + 10^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 2 + 15^2 \cdot 3 + 16^2 \cdot 4 + 17^2 \cdot 2 + 18^2 \cdot 2 + 20^2 \cdot 1) - 13,9^2 = 12,69.$$

Исправленную дисперсию найдём по формуле (4): $S^2 = \frac{20}{19}12,69 \approx 13,36$.

е) Выборочное и исправленное средние квадратические отклонения найдём по формулам (5) и

(6): $\sigma_b = \sqrt{12,69} \approx 3,56$; $s = \sqrt{13,36} \approx 3,66$.

ж) Коэффициент вариации вычислим по формуле (7): $V = \frac{3,66}{13,9} \cdot 100\% = 26,33\%$.

з) Доверительный интервал для среднего значения признака X найдём по формуле (8). Сначала по таблице [Приложение 1] найдём критическую точку распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ и уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05$ (для двусторонней критической области). Получим $t = 2,09$ и подставим в формулу (8):

$$\left(13,9 - \frac{2,09 \cdot 3,66}{\sqrt{20}}; \quad 13,9 + \frac{2,09 \cdot 3,66}{\sqrt{20}} \right).$$

После вычисления получим доверительный интервал для среднего значения (12,19; 15,61).

Расчёт характеристик линейной регрессионной модели. Одним из эффективных методов установления взаимосвязей между факторами является корреляционно-регрессионный анализ.

Задача корреляционно-регрессионного метода заключается в нахождении эмпирического уравнения, характеризующего связь результативного параметра Y с определённым входным фактором X .

В качестве формы связи Y и X широко используют линейную зависимость в силу её простоты в расчётах, а также в связи с тем, что к ней можно привести многие другие виды зависимости.

Расчёт линейной регрессионной модели включает следующие этапы:

1. Расчёт теоретического уравнения линейной регрессии;
2. Оценка силы связи, расчёт коэффициента корреляции;
3. Оценка значимости коэффициента корреляции;
4. Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии;
5. Определение адекватности уравнения регрессии и доверительных границ.

Линейная регрессия Y на X имеет вид:

$$y(x) = \alpha + \beta x,$$

где α и β — параметры регрессии (β называется коэффициентом регрессии).

Статистические оценки α^* и β^* параметров регрессии α и β выбираются таким образом, чтобы значения \hat{y}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), вычисленные по формуле $\hat{y}_i = \alpha^* + \beta^* x_i$, были как можно

ближе к эмпирическим значениям y_i . В качестве меры близости выбирают сумму квадратов отклонений $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$. Метод нахождения параметров с помощью минимизации суммы квадратов отклонений эмпирических значений y_i от теоретических значений \hat{y}_i в тех же точках называют методом наименьших квадратов.

Оптимальные значения параметров, полученные согласно этому методу, определяются формулами:

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \bar{x}, \quad \beta^* = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (9)$$

где \bar{x} и \bar{y} — средние значения X и Y , которые вычисляют по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (10)$$

Учитывая (9), запишем эмпирическую линию регрессии в виде:

$$\hat{y} = \bar{y} + \beta^* (x - \bar{x}). \quad (11)$$

Силу линейной корреляционной зависимости Y и X характеризует коэффициент корреляции r . Коэффициент r изменяется в пределах от -1 до 1 . Чем ближе он к ± 1 , тем сильнее линейная связь Y и X , в предельном случае, если $r = \pm 1$, имеет место точная линейная функциональная зависимость Y от X . Если $r = 0$, то Y и X не коррелируют. Оценкой коэффициента корреляции r служит выборочный коэффициент корреляции r^* , который вычисляется по формуле:

$$r^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (12)$$

Коэффициент корреляции r^* , определяемый по выборочным данным, может не совпадать с действительным значением, соответствующим генеральной совокупности. Для проверки статистической гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции используют t -критерий Стьюдента, наблюдаемое значение которого вычисляется по формуле:

$$t_{\text{набл}} = \frac{r^* \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^{*2}}}. \quad (13)$$

Критическое значение t -критерия $t_{\text{кр}}$ для числа степеней свободы $k = n - 2$ и уровня значимости α (двусторонняя критическая область) находят по таблицам критических точек распределения Стьюдента [Приложение 1]. Если $|t_{\text{набл}}| > |t_{\text{кр}}|$, то предположение о нулевом значении коэффициента корреляции не подтверждается, и выборочный коэффициент корреляции значим. Если $|t_{\text{набл}}| < |t_{\text{кр}}|$, то величина r близка к нулю.

Для оценки параметров, входящих в уравнение регрессии (10), при решении практических задач можно ограничиться построением доверительных интервалов. Для заданной надёжности γ доверительные интервалы для параметров \bar{y} и β определяются формулами:

$$\left(\bar{y} - \frac{t_{кр} s_{ост}}{\sqrt{n}}; \bar{y} + \frac{t_{кр} s_{ост}}{\sqrt{n}} \right), \quad (14)$$

$$\left(\beta^* - \frac{t_{кр} s_{ост}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; \beta^* + \frac{t_{кр} s_{ост}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right), \quad (15)$$

где $t_{кр}$ — критическое значение t -критерия для числа степеней свободы $k = n - 2$ и уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$, которое находят по таблицам критических точек распределения Стьюдента [1], $s_{ост}$ — квадратный корень из остаточной дисперсии $S_{ост}^2$, которая находится по формуле:

$$S_{ост}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (16)$$

После получения эмпирического уравнения регрессии, проверяют насколько оно соответствует результатам наблюдений. Для проверки гипотезы о значимости уравнения регрессии используют F -критерий Фишера, наблюдаемое значение которого вычисляют по формуле:

$$F_{набл} = \frac{S_y^2}{S_{ост}^2}, \quad (17)$$

где S_y^2 — исправленная дисперсия Y , которая вычисляется по формуле:

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (18)$$

Критическое значение F -критерия $F_{кр}$ для числа степеней свободы $k_1 = n - 1$ и $k_2 = n - 2$ и уровня значимости α находят по таблицам критических точек распределения Фишера-Снедекора [Приложение 2]. Если $F_{набл} > F_{кр}$, то гипотеза о незначимости уравнения регрессии не подтверждается, и уравнение соответствует результатам наблюдений. Если $F_{набл} < F_{кр}$, то полученное уравнение незначимо.

Ещё одной характеристикой меры того, насколько эмпирическое уравнение хорошо описывает данную систему наблюдений, является коэффициент детерминации d , который вычисляется по формуле:

$$d = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (19)$$

Чем ближе коэффициент d к единице, тем лучше описание.

После того как модель построена, она используется для анализа и прогноза. Прогноз осуществляется подстановкой фактора $x=x_0$ в уравнение (11). Получается точечная оценка y_0 :

$$y_0 = \bar{y} + \beta^* (x_0 - \bar{x}). \quad (20)$$

Доверительный интервал для прогнозируемого значения имеет вид:

$$\left(y_0 - t_{\text{кр}} s_{\text{ост}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; y_0 + t_{\text{кр}} s_{\text{ост}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right), \quad (21)$$

где $t_{\text{кр}}$ — критическое значение t -критерия для числа степеней свободы $k = n - 2$ и уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$, которое находят по таблицам критических точек распределения Стьюдента [Приложение 1].

Пример 8. По данным наблюдений определить параметры линейного уравнения регрессии Y на X . Найти коэффициенты регрессии и корреляции проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции. Найти доверительные интервалы для параметров уравнения регрессии. Определить коэффициент детерминации. Проверить гипотезу о значимости полученного уравнения регрессии. Найти прогнозируемое моделью значение y при $x=x_0$ и найти для него доверительный интервал. Уровень значимости α принять равным 0,05.

X	73	85	102	115	122	126	134	147
Y	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,4	1,7	1,9

$$x_0 = 140$$

Для получения параметров уравнения регрессии составим таблицу.

Таблица

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	\hat{y}	$(y - \hat{y})^2$
73	0,5	-40	-0,7	1600	0,49	28	0,43	0,0049
85	0,7	-28	-0,5	784	0,25	14	0,661	0,0015
102	0,9	-11	-0,3	121	0,09	3,3	0,998	0,0077
115	1,1	2	-0,1	4	0,01	-0,2	1,239	0,0193
122	1,4	9	0,2	81	0,04	1,8	1,373	0,0007
126	1,4	13	0,2	169	0,04	2,6	1,450	0,0025
134	1,7	21	0,5	441	0,25	10,5	1,604	0,0092
147	1,9	34	0,7	1156	0,49	23,8	1,854	0,0021
904	9,6	0	0	4356	1,66	83,8		0,0479

В последней строке таблицы приведены суммы столбцов, используемых в расчётах.

Найдём средние значения X и Y по формуле (10):

$$\bar{x} = \frac{904}{8} = 113; \quad \bar{y} = \frac{9,6}{8} = 1,2.$$

Вычислим коэффициент регрессии по формуле (9): $\beta^* = \frac{83,8}{4356} = 0,01924$ и получим эмпирическое уравнение регрессии, подставляя \bar{x} , \bar{y} , β^* в (11):

$$\hat{y} = 1,2 + 0,01924(x - 113). \quad (22)$$

По формуле (22) вычислим теоретические значения y и заполним два последних столбца таблицы 2.

Вычислим коэффициент корреляции по формуле (12): $r^* = \frac{83,8}{\sqrt{4356 \cdot 1,66}} = 0,985$ и

проверим гипотезу о его значимости. Наблюдаемое значение критерия найдём по формуле (13):

$$t_{\text{набл}} = \frac{0,985\sqrt{8-2}}{\sqrt{1-0,985^2}} = 13,98. \text{ По таблице критических точек распределения Стьюдента}$$

[Приложение 1] найдём критическую точку распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2 = 8 - 2 = 6$ и уровнем значимости $\alpha = 0,05$ (двусторонняя критическая область). Получим $t_{\text{кр}} = 2,45$ и сравним $t_{\text{набл}}$ и $t_{\text{кр}}$: $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$, следовательно, коэффициент корреляции значим, и Y и X связаны линейной корреляционной зависимостью.

Для определения доверительных интервалов параметров уравнения линейной регрессии (22) найдём остаточную дисперсию по формуле (16):

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{8-2} 0,0479 = 0,008. \text{ Подставляя в формулу (14), получим доверительный интервал для}$$

$$\bar{y}: \left(1,2 - \frac{2,45\sqrt{0,008}}{\sqrt{8}}; 1,2 + \frac{2,45\sqrt{0,008}}{\sqrt{8}} \right). \text{ Вычисляя, получим интервальную оценку для } \bar{y}$$

с надёжностью $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$: $1,123 < \bar{y} < 1,277$.

Доверительный интервал для β получим по формуле (15):

$$\left(0,01924 - \frac{2,45\sqrt{0,008}}{\sqrt{4356}}; 0,01924 + \frac{2,45\sqrt{0,008}}{\sqrt{4356}} \right). \text{ Итак, интервальная оценка для параметра}$$

β с надёжностью $\gamma = 0,95$: $0,0159 < \beta^* < 0,0226$.

Проверим гипотезу о значимости полученного уравнения регрессии. Для вычисления наблюдаемого значения F -критерия найдём исправленную дисперсию Y по формуле (18):

$$S_y^2 = \frac{1}{8-1} \cdot 1,66 = 0,237. \text{ Подставляя в формулу (23), получим: } F_{\text{набл}} = \frac{0,237}{0,008} = 29,625. \text{ По}$$

таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора [Приложение 2] для числа степеней свободы $k_1 = 8 - 1 = 7$ и $k_2 = 8 - 2 = 6$ на уровне значимости $\alpha = 0,05$ найдём $F_{\text{кр}} = 4,21$. Сравнивая наблюдаемое и критическое значения F -критерия, получим $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, следовательно, уравнение значимо.

Для оценки адекватности линейной модели наблюдаемым значениям найдём также коэффициент детерминации по формуле (19): $d = 1 - \frac{0,0479}{1,66} = 0,971$. Этот результат

истолковывается так: 97,1% изменчивости Y объясняется изменением фактора X , а на остальные случайные факторы приходится 2,9% изменчивости. Однако, этот вывод действителен только для рассматриваемого интервала значений X .

Используем уравнение (22) для прогноза. При $x = x_0 = 140$ точечную оценку для y получим путём подстановки $x = 140$ в формулу (22): $y_0 = 1,2 + 0,01924(140 - 113) = 1,72$.

Доверительный интервал для y_0 получим по формуле (21):

$$\left(1,72 - 2,45\sqrt{0,008\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{(140-113)^2}{4356}}}; 1,72 + 2,45\sqrt{0,008\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{(140-113)^2}{4356}}} \right).$$

Окончательно, интервальная оценка для y_0 с надёжностью $\gamma = 0,95$: $1,625 < y_0 < 1,815$.

Пример 9. Статистическая проверка статистических гипотез.

Приведено эмпирическое распределение дискретной случайной величины X_i в виде таблицы. СВ имеет смысл числа отказов. Частоты наблюдений отказов обозначены n_i . Используя критерий χ^2 , проверить на уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона. Решение. Дана таблица

x_i	0	1	2	3	≥ 4
n_i	42	10	4	3	0

Найдем объем выборки n по формуле

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^5 n_i = 42 + 10 + 4 + 3 + 0 = 59.$$

Число $k = 5$ описывает число групп данных (после объединения вариант с малочисленными частотами), приведенных в таблице наблюдений.

Вычислим оценку параметра распределения λ в законе для редких событий Пуассона

$$\lambda = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{42 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0}{59} = \frac{27}{59} = 0,458.$$

Формула Пуассона закона распределения вероятностей имеет следующий вид

$$P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}; P_0(\lambda) = e^{-\lambda}; P_m(\lambda) = P_{m-1}(\lambda) \frac{\lambda}{m},$$

где m – число появлений заданного события, в нашем примере это число отказов.

Проведем расчеты вероятностей

$$\begin{aligned} 1) P_0(\lambda) &= e^{-0,458} = 0,632; \quad 2) P_1(1) = 0,632 \cdot \lambda = 0,289; \quad 3) P_2(\lambda) = 0,289 \frac{\lambda}{2} = 0,0663; \\ 4) P_3(\lambda) &= 0,0663 \cdot \frac{\lambda}{3} = 0,0101; \quad 5) \sum_{m=0}^3 P_m(\lambda) = 0,9983; \quad 6) P_{m \geq 4}(\lambda) = 1 - 0,9983 = 0,0017. \end{aligned}$$

Найдем теоретические частоты \tilde{n}_i , применяя расчетную формулу

$$\tilde{n}_i = n \cdot P_{i-1}(\lambda), i = 1, 2, \dots, 4, 5,$$

в которой величина i означает номер группы данных в таблице отказов. Подставим теоретические частоты в таблицу расчета эмпирического критерия Пирсона

i	\tilde{n}_i	$ n_i - \tilde{n}_i $	$ n_i - \tilde{n}_i ^2 / \tilde{n}_i$
1	37,3	4,7	0,592
2	17	7	2,88
3	3,9	0,1	0,003
4	0,6	2,4	9,6
5	0,096	0,096	0,096
$\chi_{\text{эмп}}^2$			13,17

Эмпирический критерий находится путем суммирования данных, размещенных в последнем столбце таблицы:

$$\chi_{\text{эмп}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i},$$

где k – общее число значимых групп данных

Для нахождения $\chi^2_{\text{теор}}$ воспользуемся таблицами критических точек распределения χ^2 [Приложение 3], где $\alpha = 0,05$ – уровень значимости и $k-2=3$ – число степеней свободы.

$$\chi^2_{\text{теор}}(\alpha, k-2) = \chi^2_{\text{теор}}(0,05; 3) = 7,8.$$

Поскольку выполнено неравенство $\chi^2_{\text{эмп}} = 13,17 > \chi^2_{\text{теор}} = 7,8$, то статистическую гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена по закону редких событий Пуассона следует отвергнуть. При этом риск отвергнуть правильную гипотезу равен уровню значимости, т.е. в примере этот риск равен пяти процентам.

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

Теория вероятностей

1. Классическая вероятность, ее свойства.
2. Геометрическая вероятность, ее свойства.
3. Статистическая вероятность, ее свойства.
4. Сумма событий. Теорема сложения вероятностей 2-х произвольных событий, следствия.
5. Условная вероятность. Теорема умножения, следствия из нее.
6. Обобщенная теорема умножения, следствия из нее.
10. Полная вероятность. Формулы Байеса.
11. Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли с выводом.
12. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
13. Теорема Пуассона.
14. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Свойства функции $\Phi(x)$.
15. Следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа.
16. Случайные величины (СВ), примеры. Дискретные и непрерывные СВ.
17. Закон распределения дискретной СВ.
18. Функция распределения СВ, ее свойства.
19. Плотность распределения вероятностей непрерывной СВ, ее свойства.
20. Вероятностный смысл плотности распределения СВ.
21. Математическое ожидание СВ, его свойства и вероятностный смысл.
22. Дисперсия. Формула для вычисления дисперсии. Среднее квадратическое отклонение.
23. Свойства дисперсии.
24. Законы распределения и их характеристики:
 - а) биномиальный; б) Пуассона; в) равномерный; г) показательный; д) нормальный.

Математическая статистика

1. Выборочный метод. Генеральная совокупность. Выборка, требования к ней. Способы отбора.
2. Статистическое распределение выборки. Характеристики вариационного ряда.
3. Эмпирическая функция распределения, ее свойства.
4. Графическое изображение выборочных данных: полигон частот, гистограмма.
5. Статистические оценки параметров распределения, требования к ним. Точечные и интервальные оценки.
6. Генеральная и выборочная средние. Точечная оценка генеральной средней.
7. Генеральная, выборочная и исправленная дисперсии. Точечные оценки дисперсии.
8. Формула для вычисления дисперсии.
9. Понятие о распределениях χ^2 , Стьюдента и Фишера—Снедекора.
10. Интервальные оценки. Точность и надежность оценки. Доверительный интервал.
11. Интервальные оценки для параметров нормального распределения.

12. Статистическая гипотеза. Нулевая, конкурирующая, простая и сложная гипотезы. Ошибки первого и второго родов. Мощность критерия. Статистический критерий. Критические области и точки.

13. Критерий согласия. Критерий согласия χ^2 , его закон распределения.

14. Проверка гипотез о законах распределения с помощью Критерия согласия χ^2 , (на примерах распределения Пуассона и нормального закона).

15. Корреляционные характеристики, их оценки по данным выборки. Выборочное уравнение линейной регрессии. Его параметры.

16. Выборочный коэффициент корреляции, проверка гипотезы о его значимости.

17. Остаточная дисперсия. Проверка гипотезы о значимости выборочного уравнения регрессии.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
1	Колемаев, В.А., Калинина, В.Н.	Теория вероятностей и математическая статистика: учебник	Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017	ЭБС
2	Гмурман, В.Е.	Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов	М.: Высш. шк., 2002	139
Дополнительная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
1	Ермаков Валерий Иванович	Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие	Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2004	ЭБС
2	Горлач, Б.А.	Теория вероятностей и математическая статистика	Лань, 2013	ЭБС
Методические разработки				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
1	И.Н. Нурутдинова, Д.А. Пожарский	Статистическая обработка результатов эксперимента: учебное пособие	ДГТУ, 2011	ЭБС
2	В.И. Полтинников, Д.А. Пожарский	ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: учебное пособие	ДГТУ, 2016	ЭБС
Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"				
1	Электронная библиотечная система НТБ ДГТУ: http://ntb.donstu.ru/			

Критические точки распределения Фишера-Снедекора

Уровень значимости $\alpha = 0,05$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,45	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы	Уровень значимости α					
	0,01	0,05	0,1	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,5	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,98	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,6	14,0	12,63	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

Таблица значений функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
0.0...	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0.1...	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0.2...	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0.3...	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0.4...	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0.5...	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0.6...	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0.7...	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0.8...	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0.9...	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1.0...	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1.1...	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1.2...	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1.3...	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1.4...	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1.5...	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1.6...	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1.7...	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1.8...	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1.9...	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2.0...	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2.1...	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2.2...	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2.3...	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2.4...	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2.5...	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2.6...	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2.7...	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2.8...	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2.9...	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3.0...	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3.1...	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3.2...	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3.3...	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3.4...	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3.5...	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3.6...	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3.7...	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3.8...	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3.9...	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315	1,28	0,3997	1,60	0,4452	1,92	0,4726	2,48	0,4934
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340	1,29	0,4015	1,61	0,4463	1,93	0,4732	2,50	0,4938
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365	1,30	0,4032	1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389	1,31	0,4049	1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413	1,32	0,4066	1,64	0,4495	1,96	0,4750	2,56	0,4948
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438	1,33	0,4082	1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461	1,34	0,4099	1,66	0,4515	1,98	0,4761	2,60	0,4953
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485	1,35	0,4115	1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508	1,36	0,4131	1,68	0,4535	2,00	0,4772	2,64	0,4959
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531	1,37	0,4147	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554	1,38	0,4162	1,70	0,4554	2,04	0,4793	2,68	0,4963
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577	1,39	0,4177	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,70	0,4965
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599	1,40	0,4192	1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621	1,41	0,4207	1,73	0,4582	2,10	0,4821	2,74	0,4969
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643	1,42	0,4222	1,74	0,4591	2,12	0,4830	2,76	0,4971
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665	1,43	0,4236	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686	1,44	0,4251	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,80	0,4974
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708	1,45	0,4265	1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729	1,46	0,4279	1,78	0,4625	2,20	0,4861	2,84	0,4977
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749	1,47	0,4292	1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770	1,48	0,4306	1,80	0,4641	2,24	0,4875	2,88	0,4980
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790	1,49	0,4319	1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,90	0,4981
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810	1,50	0,4332	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,92	0,4982
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830	1,51	0,4345	1,83	0,4664	2,30	0,4893	2,94	0,4984
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849	1,52	0,4357	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869	1,53	0,4370	1,85	0,4678	2,34	0,4904	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883	1,54	0,4382	1,86	0,4686	2,36	0,4909	3,20	0,49931
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907	1,55	0,4394	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,40	0,49966
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925	1,56	0,4406	1,88	0,4699	2,40	0,4918	3,60	0,499841
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944	1,57	0,4418	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,80	0,499928
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3926	1,58	0,4429	1,90	0,4713	2,44	0,4927	4,00	0,499968
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980	1,59	0,4441	1,91	0,4719	2,46	0,4931	5,00	0,499997

Свойства функции $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
2. при $x > 5$ $\Phi(x) = 0,5$.